Wirtschaftsmathematik

Teil I: Differenzialrechnung – Anwendung in der ökonomischen Theorie

I. Kosten

1. Gesamtkosten $\boxed{C_{(q)}}$

$C_{(q)} = \frac{1}{3} q^3 - 4q^2 + 20q + 10$ *(Gesamtkostenfunktion)*

2. Fixe Kosten $\boxed{C_{(0)}}$

Bedingung: q = 0

$C_{(0)} = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 20 \cdot 0 + 10$

$C_{(0)} = 10$

2. Variable Kosten $\boxed{C_{v(q)}}$

$C_{v(q)} = \frac{1}{3} q^3 - 4q^2 + 20q$ *(Funktion der variablen Kosten)*

KURVENDISKUSSION:

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $C_{v(q)} = 0$

$\frac{1}{3} q^3 - 4q^2 + 20q = 0$

$q\left(\frac{1}{3} q^2 - 4q + 20\right) = 0$

$\rightarrow \underline{\underline{q_1 = 0}}$ oder $\frac{1}{3} q^2 - 4q + 20 = 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} q^2 - 4q + 20 &= 0 \quad \Big| \cdot 3 \\ q^2 - 12q + 60 &= 0 \end{aligned}$$

$$q_{2/3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-)12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 240}}{2}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung, da Zahl unter √ nicht negativ sein darf

$\Rightarrow q_1 = 0$ ist die einzige Nullstelle

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $C'_{v(q)} = 0$

$C'_{v(q)} = \frac{1}{3} \cdot (3q^2) - 4 \cdot (2q) + 20 \cdot 1 = q^2 - 8q + 20$

$q^2 - 8q + 20 = 0$

$$q_{4/5} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-)8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{60 - 80}}{2}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung

$\Rightarrow$ keine Extremwerte ($\cong$ keine Punkte mit waagerechter Tangente)

4. Durchschnittliche Kosten

4.1 Variable Durchschnittskosten $\boxed{\bar{C}_{v(q)}}$

$$\bar{C}_{v(q)} = \frac{C_{v(q)}}{q} = \frac{\frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q}{q} = \tfrac{1}{3}q^2 - 4q + 20$$

KURVENDISKUSSION:

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $\bar{C}_{v(q)} = 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}q^2 - 4q + 20 &= 0 \quad \mid \bullet 3 \\ q^2 - 12q + 60 &= 0 \end{aligned}$$

$$q_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-)12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 240}}{2}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung, keine Nullstelle

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $\bar{C}'_{v(q)} = 0$

$\bar{C}'_{v(q)} = \tfrac{2}{3}q - 4$

$\tfrac{2}{3}q - 4 = 0$

$q = 6$

$\bar{C}_{v(6)} = \tfrac{1}{3} \bullet 6^2 - 4 \bullet 6 + 20$

$= 12-24+20 = 8$

Minimum = (6 / 8)

C) Schnitt mit der senkrechten Achse

Bedingung: $q = 0$

$\bar{C}_{v(0)} = \tfrac{1}{3} \bullet 0^2 - 4 \bullet 0 + 20 = 20$

$\bar{C}_{v(0)} = 20$

4.2 Durchschnittliche Gesamtkosten $\boxed{\bar{C}_{(q)}}$

$$\bar{C}_{(q)} = \frac{C_{(q)}}{q} = \frac{\frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q + 10}{q} = \tfrac{1}{3}q^2 - 4q + 20 + \frac{10}{9}$$

(Funktion der durchschnittlichen Gesamtkosten)

5. Grenzkosten

$\boxed{C'_{(q)}}$

$C'_{(q)} = q^2 - 8q + 20$ *(Funktion der Grenzkosten)*

KURVENDISKUSSION:

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $C'_{(q)} = 0$

$q^2 - 8q + 20 = 0$

$$q_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-)8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{60 - 80}}{2}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung, keine Nullstelle

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $C''_{(q)} = 0$

$2q - 8 = 0$

$q = 4$

$\bar{C}_{v(6)} = 1 \bullet 4^2 - 8 \bullet 4 + 20 = 4$ Maximum = (4 / 4)

C) Schnitt mit der senkrechten Achse

Bedingung: $q = 0$

$\bar{C}'_{(0)} = 1 \bullet 0^2 - 8 \bullet 0 + 20 = 20$

$\bar{C}'_{(0)} = 20$

II. Gewinn

1. Polypol

1.1. Erlösfunktion $\boxed{R_{(q)}}$

p = 6 (p = konstant)

$R_{(q)} =$ p • q = 6 p
(Preis) • (Menge)

1.2. Kostenfunktion $\boxed{C_{(q)}}$

$C_{(q)} = q^3 - 3q^2 + 4q + 5$

1.3. Gewinnfunktionfunktion $\boxed{G_{(q)}}$

$G_{(q)} = R_{(q)} - C_{(q)}$
(Erlös) - (Kosten)

$$
\begin{aligned}
G_{(q)} &= 6q - (q^3 - 3q^2 + 4q + 5) \\
&= 6q - q^3 + 3q^2 - 4q - 5 \\
G_{(q)} &= -q + -3q^2 + 2q - 5
\end{aligned}
$$

1.4. Gewinnmaximum

a) Extremwertberechnung

Bedingung: $G'_{(q)} = 0$

$$
\begin{aligned}
G'_{(q)} &= -3q^2 + 6q + 2 \\
&-3q^2 + 6q + 2 = 0
\end{aligned}
$$

$$q_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{-6}$$

$\Rightarrow$ (q_1 = -0,3), = q_2 = 2,3

Einsetzen in $G_{(q)}$: $G'_{(2,3)} = --1 \bullet 2{,}3^3 + 3 \bullet 2{,}3q^2 + 2 \bullet 2{,}3 - 5 = 3{,}3$

Maximum (2,3 / 3,3)

b) höchster Gewinn

Bedingung: $G'_{(q)} = 0$

$$
\begin{aligned}
G'_{(q)} &= R'_{(q)} - C'_{(q)} \\
&R'_{(q)} = C'_{(q)} = 0
\end{aligned}
$$

$$\boxed{R'_{(q)} = C'_{(q)}}$$

$\boxed{\text{Grenzerlöse} = \text{Grenzkosten}}$

Grenzerlöse = $R_{(q)} = p \bullet q$
$R'_{(q)} = p$

Grenzkosten = $C_{(q)} = q^3 - 3q^2 + 4q + 5$
$C'_{(q)} = 3q^2 - 6q + 4$

$$\begin{aligned} R'_{(q)} &= C'_{(q)} \\ 6 &= 3 \bullet 2{,}3^2 - 6 \bullet 2{,}3 + 4 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

(Achtung: Rundungsfehler, da 2,3xx)

2. Monopol

1.1. Erlösfunktion $\boxed{R_{(q)}}$

$p = -2q + 30$ (Bem: muss keine Gerade sein, ist aber nicht konstant)

$$\begin{aligned} R_{(q)} = p \bullet q &= (-2q + 30) \bullet q \\ &= -2q^2 + 30q \end{aligned}$$

1.2. Kostenfunktion $\boxed{C_{(q)}}$

$C_{(q)} = 3q + 5$

1.3. Gewinnfunktionfunktion $\boxed{G_{(q)}}$

$$\begin{aligned} G_{(q)} &= R_{(q)} - C_{(q)} \\ G_{(q)} &= -2q^3 + 30q - (3q + 5) \\ &= -2q^3 + 30q - 3q - 5) \\ G_{(q)} &= -2q^3 + 27q - 5 \end{aligned}$$

1.4. Gewinnmaximum

a) Extremwertberechnung

Bedingung: $G'_{(q)} = 0$

$$\begin{aligned} G'_{(q)} &= -4q + 27 \\ -4q + 27 &= 0 \quad | : (-4) \\ q &= \frac{-27}{-4} = 6{,}75 \end{aligned}$$

Einsetzen in $G_{(q)}$: $G'_{(6,75)} = --1 \bullet 6{,}75^2 + 27 \bullet 6{,}75 - 5 = 86{,}13$

Maximum (6,75 / 86,13)

III. Kurven zum klassischen Ertragsgesetz

1. Gesamtertrag

$\boxed{E_{(x)}}$

$E_{(x)}$ = variabler Produktionsfaktor Arbeit (Bem: Boden und Kapital = fix)
x = Anzahl der eingesetzten Einheiten eines variablen Faktors (Arbeit)

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $E_{(x)} = 0$

$E_{(x)} = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 3x$

$-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 3x = 0$

$x\,(-\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3 = 0$

$\rightarrow \underline{\underline{q_1 = 0}}$ oder $-\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3 = 0$ $\quad (\;|\bullet 3 \;\Rightarrow\; -x^2 + 15x + 9 = 0)$

$$x_{2/3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-15 \pm \sqrt{261}}{-2}$$

$(x_2 = -0{,}6)$; $x_3 = 15{,}5$

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $E'_{(x)} = 0$

$E'_{(x)} = -x^3 + 10x + 3$

$-x^3 + 10x + 3 = 0$

$$x_{4/5} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{112}}{-2}$$

$(x_4 = -0{,}3)$; $x5 = 10{,}3$

Einsetzen in $E_{(x)}$: $E_{(10,3)} = -\frac{1}{3} \bullet 10{,}3^3 + 5 \bullet 10{,}3^2 + 3 \bullet 10{,}3 = 200{,}8$

Maximum (10,3 / 300,8)

2. Durchschnittsertrag

$\bar{E}_{(x)}$

$$\bar{E}_{(x)} = \frac{E_{(x)}}{x} = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 5^2 + 3x}{x} = -\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3$$

<u>KURVENDISKUSSION:</u>

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $\bar{E}_{(x)} = 0$

$\bar{E}_{(x)} = -\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3$

$-\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3 = 0 \quad |\bullet 3$

$-x^2 + 15x + 9 = 0$

$$x_{2/3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{261}}{-2}$$

$(x_2 = -0{,}6)$; $x_3 = 15{,}5$

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $\bar{E}'_{(x)} = 0$

$\bar{E}'_{(x)} = -\frac{2}{3}x + 5$

$-\frac{2}{3}x + 5 = 0$

$x = 7{,}5$

Einsetzen in $\overline{E}_{(x)}$: $\overline{E}_{(7,5)} = -⅓ \bullet 7,5^2 + 5 \bullet 7,5 + 3 = 21,75$

Maximum (7,5 / 21,75)

3. Grenzertrag $E'_{(x)}$

$E'_{(x)} = -x^3 + 10x + 3$ *(Funktion des Grenzertrags)*

KURVENDISKUSSION:

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $E'_{(x)} = 0$

$E'_{(x)} = -x^3 + 10x + 3$

$-x^3 + 10x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{112}}{-2}$$

$(x1 = -0,3)$; $x_4 = 10,3$

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $E''(x) = 0$

$E''_{(x)} = -x + 10$

$-x + 10 = 0$

$x = 10$

Einsetzen in $E_{(x)}$: $E_{(10)} = -1 \bullet 10^2 + 10 \bullet 10 + 3 = 3$

Maximum (10 / 3)

Zusammenfassung

I. Kosten

1. Gesamtkosten	$C(q)$	$= q^3 - q^2 + q + a$
2. Fixe Kosten	$C(0)$	$= a$ Bedingung: $q = 0$
2. Variable Kosten	$C_v(q)$	$= q^3 - q^2 + q$
a) Nullstellen	Bedingung: $C_{v(q)} = 0$	
b) Extremwert	Bedingung: $C'_{v(q)} = 0$	
4. Durchschnittliche Kosten		
4.1 Variable Durchschnittskosten	$\bar{C}_{v(q)}$	$= \frac{C_{v(q)}}{q}$
a) Nullstellen	Bedingung: $\bar{C}_{v(q)} = 0$	
b) Extremwert	Bedingung: $\bar{C}'_{v(q)} = 0$	
c) Schnitt mit der senkrechten Achse	Bedingung: $q = 0$	
4.2 Durchschnittliche Gesamtkosten	$\bar{C}(q)$	$= \frac{C_{(q)}}{q}$
5. Grenzkosten	$C'(q)$	$= 3q^3 + 2q + a$
a) Nullstellen	Bedingung: $C'_{(q)} = 0$	
b) Extremwert	Bedingung: $C''_{(q)} = 0$	
c) Schnitt mit der senkrechten Achse	Bedingung: $q = 0$	

II. Gewinnmaximum

1. Erlösfunktion	$R(q)$	$= p \bullet q$ [Preis • Menge]
2. Kostenfunktion	$C(q)$	
2. Gewinnfunktion	$G(q)$	$= R(q) - C(q)$
3. Gewinnmaximum		
a) Extremwert (Maximum)	Bedingung: $G'_{(q)} = 0$	
b) höchster Gewinn (nicht beim Monopol)	Bedingung: $G'_{(q)} = 0$	$= G'_{(q)} = R'_{(q)} - C'_{(q)}$ $\Rightarrow R'_{(q)} = C'_{(q)}$

II. Kurven zum klassischen Ertragsgesetz

1. Gesamtertrag	$E(x)$	
a) Nullstellen	Bedingung: $E_{(v)} = 0$	
b) Extremwert	Bedingung: $E'_{(x)} = 0$	
2. Durchschnittsertrag	$\bar{E}(x)$	
a) Nullstellen	Bedingung: $\bar{E}_{(v)} = 0$	
b) Extremwert	Bedingung: $\bar{E}'_{(x)} = 0$	
3. Grenzertrag	$E'(x)$	
a) Nullstellen	Bedingung: $E'_{(v)} = 0$	
b) Extremwert	Bedingung: $E''_{(x)} = 0$	