WIRTSCHAFTS-MATHEMATIK

DIFFERENZIALRECHNUNG

IN DER ÖKONOMISCHEN THEORIE

I. KOSTEN

1. GESAMTKOSTEN $C_{(q)}$

z.B: $C_{(q)} = \frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q + 10$ (Gesamtkostenfunktion)

2. FIXE KOSTEN $C_{(0)}$

Bedingung: $q = 0$

$\rightarrow C_{(0)} = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 20 \cdot 0 + 10$

$C_{(0)} = 10$

3. VARIABLE KOSTEN $C_{v(q)}$

$C_{v(q)} = \frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q$ (Funktion der variablen Kosten)

KURVENDISKUSSION:

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $C_{v(q)} = 0$

$\frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q = 0$

$q(\frac{1}{3}q^2 - 4q + 20) = 0$

$\rightarrow \underline{q_1 = 0}$ oder $\frac{1}{3}q^2 - 4q + 20 = 0$ (Bruch entfernen = $\cdot 3$)

$q_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+12 \pm \sqrt{144 - 240}}{2}$

=> keine Lösung, da Zahl unter $\sqrt{\ }$ nicht negativ sein darf

=> $q_1 = 0$ ist die einzige Nullstelle

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $C'_{v(q)} = 0$

$C'_{v(q)} = \frac{1}{3}(3q^2) - 4(2q) + 20 \cdot 1 = q^2 - 8q + 20$

$q^2 - 8q + 20 = 0$

$q_{4/5} = \frac{8 \pm \sqrt{64-80}}{2}$ ⇒ keine Lösung

⇒ keine Extremwerte (keine Pkte mit waagerechter Tangente)

4. DURCHSCHNITTLICHE KOSTEN

4.1 Variable Durchschnittskosten $\overline{C}_{v(q)}$

$\overline{C}_{v(q)} = \frac{C_{v(q)}}{q} = \frac{\frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q}{q} = \frac{1}{3}q^2 - 4q + 20 \Rightarrow (q^2 - 12q + 60)$ $(\cdot 3)$

(Funktion der durchschnittlichen variablen Kosten)

KURVENDISKUSSION:

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $\overline{C}_{v(q)} = 0$

$q^2 - 12q + 60 = 0$

$q_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-240}}{2}$ ⇒ keine Nullstellen

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $\overline{C}'_{v(q)} = 0$

$\overline{C}'_{v(q)} = 2q - 12$ (oder $\frac{2}{3}q - 4$)

$2q - 12 = 0$ $\qquad$ $\frac{2}{3}q - 4 = 0$

$q = 6$ $\qquad$ $q = 6$

$\overline{C}_{v(6)} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 + 20$ $\qquad$ Minimum = $(6|8)$

$= 12 - 24 + 20 = 8$

c) Schnitt mit der senkrechten Achse

Bedingung: $q = 0$

$\frac{1}{3} \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 20 = 20$

$\bar{C}_{v(0)} = 20$

4.2 Durchschnittliche Gesamtkosten $\bar{C}_{(q)}$

$$\bar{C}_{v(q)} = \frac{C_{(q)}}{q} = \frac{\frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q + 10}{q} = \frac{1}{3}q^2 - 4q + 20 + \frac{10}{q}$$

(Funktion der durchschnittlichen Gesamtkosten)

5. GRENZKOSTEN $C'_{(q)}$

$C'_{(q)} = q^2 - 8q + 20$ (Funktion der Grenzkosten)

KURVENDISKUSSION:

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $C'_{(q)} = 0$

$q^2 - 8q + 20 = 0$

$q_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{2}$ => keine Nullstellen

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $C''_{(q)} = 0$

$2q - 8 = 0$

$q = 4$

$C'_{(4)} = 1 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 20 = 4$ Minimum = $(4/4)$

c) Schnitt mit der senkrechten Achse

Bedingung: $q = 0$

$C'_{(0)} = 1 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 20 = 20$

II GEWINN

1. POLYPOL

1.1 ERLÖSFUNKTION $\quad R_{(q)} = p \cdot q$

$p = 6 \qquad (p = \text{konstant})$

$$R_{(q)} = \underset{(\text{Preis})}{p} \cdot \underset{(\text{Menge})}{q} = 6 \cdot q$$

1.2 KOSTENFUNKTION $\quad C_{(q)}$

$$C_{(q)} = q^3 - 3q^2 + 4q + 5$$

1.3 GEWINNFUNKTION $\quad G_{(q)} = R_{(q)} - C_{(q)}$

$$G_{(q)} = \underset{(\text{Erlös})}{R_{(q)}} - \underset{(\text{Kosten})}{C_{(q)}}$$

$$G_{(q)} = 6q - (q^3 - 3q^2 + 4q + 5)$$

$$= 6q - q^3 + 3q^2 - 4q - 5$$

$$G_{(q)} = -q^3 + 3q^2 + 2q - 5$$

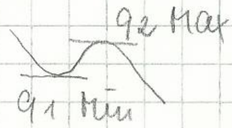
1.4. GEWINNMAXIMUM

a) Extremwertberechnung

Bedingung: $G'_{(q)} = 0$

$$G'_{(q)} = -3q^2 + 6q + 2$$

$$-3q^2 + 6q + 2 = 0$$



$$q_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{-6} \quad (q_1 = -0{,}3 \mid q_2 = 2{,}3$$

Einsetzen in $G_{(q)} \Rightarrow G_{(2{,}3)} = -2{,}3^3 + 3 \cdot 2{,}3^2 + 2 \cdot 2{,}3 - 5 = 3{,}3$

Maximum $(2{,}3 \mid 3{,}3)$

b) Höchster Gewinn

Bedingung: $G'_{(q)} = 0$

$G_{(q)} = R_{(q)} - C_{(q)}$

$G'_{(q)} = R'_{(q)} - C'_{(q)}$

$R'_{(q)} - C'_{(q)} = 0$

$\boxed{R'_{(q)} = C'_{(q)}}$

Grenzerlöse = Grenzkosten

Grenzerlöse: $R'_{(q)}$ $(R_{(q)} = p \cdot q)$

$R'_{(q)} = p$

$R_{(q)} = \overset{(p)}{6} \cdot q$

$R'_{(q)} = 6$

$R'_{(q)} = p$

Grenzkosten: $C'_{(q)}$ $(C_{(q)} = q^3 - 3q^2 + 4q + 5)$

$C'_{(q)} = 3q^2 - 6q + 4$

$R'_{(q)} = C'_{(q)}$

$6 = 3 \cdot 2{,}3^2 - 6 \cdot 2{,}3 + 4$ (Rundungsfehler!)

$6 = 6$

2. MONOPOL

2.1 ERLÖSFUNKTION $\quad R_{(q)} = p \cdot q$

$p = -2q + 30$ (muss keine Gerade sein!)

$R_{(q)} = p \cdot q = (-2q + 30) \cdot q$

$= -2q^2 + 30q$

2.2 KOSTENFUNKTION $\quad C_{(q)}$

$C_{(q)} = 3q + 5$

2.3 GEWINNFUNKTION $\quad G_{(q)} = R_{(q)} - C_{(q)}$

$G_{(q)} = R_{(q)} - C_{(q)}$

$G_{(q)} = -2q^2 + 30q - (3q + 5)$

$= -2q^2 + 30q - 3q - 5$

$G_{(q)} = -2q^2 + 27q - 5$

2.4 GEWINNMAXIMUM

a) Extremwertberechnung

Bedingung: $G'_{(q)} = 0$

$G'_{(q)} = -4q + 27$

$-4q + 27 = 0 \quad | : -4$

$q = \frac{-27}{-4} = 6{,}75$

Einsetzen in $G_{(q)}$ $\Rightarrow G_{(6{,}75)} = 2 \cdot 6{,}75^2 + 27 \cdot 6{,}75 - 5 = 86{,}13$

Maximum $(6{,}75 \mid 86{,}13)$

III KURVEN ZUM KLASSISCHEN ERTRAGSGESETZ

1. ERTRAGSGESETZ $E_{(x)}$ (19. Jh.)

Boden = fix
Kapital = fix

$E_{(x)}$ = variabler Produktionsfaktor Arbeit
x = Anzahl der eingesetzten Einheiten eines variablen Faktors (Arbeit)

KURVENDISKUSSION

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $E_{(x)} = 0$

$E_{(x)} = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 3x$

$-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 3x = 0$

$x\,(-\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3 = 0$

$\rightarrow x_1 = 0$ oder $-\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3 = 0 \quad | \cdot 3 \Rightarrow -x^2 + 15x + 9 = 0$

$x_{2/3} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-15 \pm \sqrt{261}}{-2} \quad (x_2 = -0{,}6),\ x_3 = 15{,}5$

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $E'_{(x)} = 0$

$E'_{(x)} = -x^2 + 10x + 3$

$-x^2 + 10x + 3 = 0$

$x_{4/5} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{112}}{-2} \quad (x_4 = -0{,}3),\ x_5 = 10{,}3$

$E_{(10,3)} = -\frac{1}{3} \cdot 10{,}3^3 + 5 \cdot 10{,}3^2 + 3 \cdot 10{,}3 = 200{,}8$

Maximum $(10{,}3 \mid 200{,}8)$

2. DURCHSCHNITTSERTRAG $\overline{E}_{(x)}$

$$\overline{E}_{(x)} = \frac{E(x)}{x} = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 3x}{x} = -\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3$$

KURVENDISKUSSION

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $\overline{E}_{(x)} = 0$

$$\overline{E}_{(x)} = -\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 5x + 3 = 0 \quad \| \cdot 3 \Rightarrow -x^2 + 15x + 9 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-15 \pm \sqrt{261}}{-2} \quad (x_1 = -0{,}6) \; x_2 = 15{,}5$$

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $\overline{E}'_{(x)} = 0$

$$\overline{E}'_{(x)} = -\frac{2}{3}x + 5$$

$$-\frac{2}{3}x + 5 = 0$$

$$x = 7{,}5$$

$$\overline{E}_{(7{,}5)} = -\frac{1}{3} \cdot 7{,}5^2 + 5 \cdot 7{,}5 + 3 = 21{,}75$$

Maximum $(7{,}5 / 21{,}75)$

3. GRENZERTRAG $E'_{(x)}$

$E'_{(x)} = -x^2 + 10x + 3$ (Funktion des Grenzertrags)

KURVENDISKUSSION

a) Nullstellenberechnung

Bedingung: $E'_{(x)} = 0$

$$-x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{112}}{-2} \quad (x_1 = -0{,}3), \; x_2 = 10{,}3$$

b) Extremwertberechnung

Bedingung: $E''_{(x)} = 0$

$E''_{(x)} = -x + 10$

$-x + 10 = 0$

$x = 10$

$E'_{(10)} = -1 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10 + 3 = 3$

Maximum $(10 | 3)$

ZUSAMMENFASSUNG

I Kosten

1. Gesamtkosten $C_{(q)} = q^3 + q^2 + q + a$
2. Fixe Kosten $C_{(0)} = a$
3. Variable Kosten $C_{v(q)} = q^3 + q^2 + q$
   a) Nullstellen (Bed: $C_{v(q)} = 0$)
   b) Extremwerte (Bed: $C'_{v(q)} = 0$)
4. Durchschnittliche Kosten
   4.1 Variable Durchschnittskosten $\overline{C}_{v(q)} = \frac{C_{v(q)}}{q}$
      a) Nullstellen (Bed: $\overline{C}_{v(q)} = 0$)
      b) Extremwerte (Bed: $\overline{C}'_{v(q)} = 0$)
      c) Schnittstelle mit der senkrechten Achse (Bed: $q = 0$)
   4.2 Durchschnittliche Gesamtkosten $\overline{C}_{(q)} = \frac{C_{(q)}}{q}$
5. Grenzkosten $C'_{(q)} = 3q^2 + 2q + a$
   a) Nullstellen (Bed: $C'_{(q)} = 0$)
   b) Extremwerte (Bed: $C''_{(q)} = 0$)
   c) Schnittstelle mit der senkrechten Achse (Bed: $q = 0$)

II Gewinn

1. Erlösfunktion $R_{(q)} = p \cdot q$ (Preis · Menge)
2. Kostenfunktion $C_{(q)}$
3. Gewinnfunktion $G_{(q)} = R_{(q)} - C_{(q)}$
4. Gewinnmaximum
   a) Extremwerte (Bed: $G'_{(q)} = 0$)
   b) höchster Gewinn (Bed: $G'_{(q)} = 0$) $G'_{(q)} = R'_{(q)} - C'_{(q)}$
      nicht bei Monopol! $\Rightarrow R'_{(q)} = C'_{(q)}$

III Kurven zum klassischen Ertragsgesetz

1. Ertragsgesetz (Gesamtertrag) $E_{(x)}$
   - a) Nullstellen (Bed: $E_{(x)} = 0$)
   - b) Extremwerte (Bed: $E'_{(x)} = 0$)
2. Durchschnittsertrag $\bar{E}_{(x)}$
   - a) Nullstellen (Bed: $\bar{E}_{(x)} = 0$)
   - b) Extremwerte (Bed: $\bar{E}'_{(x)} = 0$)
3. Grenzertrag $E'_{(x)}$
   - a) Nullstellen (Bed: $E'_{(x)} = 0$)
   - b) Extremwerte (Bed: $E''_{(x)} = 0$)