FINANZ-MATEMATIK

BEGRIFFE UND DEFINITIONEN

NUMMERIERUNG: 1; 2; 3; usw.

ZEITEINTEILUNG: in Zeiteinheiten:

1 Jahr ≙ 360 Tage

1 Monat ≙ 30 Tage

1 Quartal ≙ 3 Monate

ZEITPUNKT: Anfang bzw. Ende einer Zeiteinheit

LAUFZEIT (ℓ): $\underbrace{\text{Auszahlungszeitpunkt} - \text{Einzahlungszeitpunkt}}_{L = \text{Laufzeit}}$

(hier: Einzahlungstag wird nicht, Auszahlungstag wird voll gerechnet

ZINSEN (Z): hängen ab direkt proportional von

(1) r (Einzahlungsbetrag)

(2) ℓ (Laufzeit)

(3) p (Zinsfuß)

ZINSFUß (p): gibt an, wieviele Zinsen r für 1 Jahr fällig werden

ZINSTERMINE: meistens die Jahresenden

ZINSGUTSCHRIFT: Zinsen werden normalerweise dem Konto gutgeschrieben

WICHTIGE BERECHNUNGEN

WURZELBERECHNUNG

$\sqrt[n]{x}$ x nicht negativ [heißt: 0 dabei]
n natürliche Zahl

$\sqrt[n]{x}$ ist diejenige nicht negative Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert x ergibt

$\sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}}$

LOGARITHMUS

$1000 = 10^3$ $[1352 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0]$

Der Logarithmus vom 1000 zur Basis 10 = 3

Logarithmus = gesuchter Exponent

$\overset{10}{\log}\, 1000 = 3$ $({}^{10}\log 1000 = 3;\ \log_{10} 1000 = 3) = \lg 1000 = 3$
= dekadischer Logarithmus

z.B: $510 = 10^?$ Taschenrechner: lg
$\lg 512 = 2{,}709$
$512 = 10^{2{,}709}$

Natürlicher Logarithmus: Taschenrechner: ln
→ Eulersche Zahl: 2,718281828459 05.....

VERZINSUNG VON EINZELBETRÄGEN

I. EINFACHE ZNSRECHNUNG

1. EINFACHE ZINSRECHNUNG

Relativer Zinsfuß

relativer Zinsfuß pro Tag $\frac{p}{360}$

relativer Zinsfuß pro Monat $\frac{p}{12}$

relativer Zinsfuß pro Quartal $\frac{p}{4}$

Berechnung der Laufzeit (t)

z.B. Einzahlungstag (ETg) 11.3.1.J., Auszahlungstag (ATg) 23.10.1.J.

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12

11.3. — 222 Tg — 23.10.

$$\boxed{t = (AMon - EMon) \cdot 30 + (ATg - ETg)}$$

Berechnung der Zinsen (Z)

gegeben: r, t, p gesucht: Z

$$\boxed{Z = r \cdot \frac{t}{360} \cdot (q-1)}$$

Einfache Zinsformel

NR: $q = 1 + \frac{p}{100} \quad | -1$

$q - 1 = \frac{p}{100}$

Berechnung des Anfangkapitals (r)

gegeben: Z, t, p gesucht: r

$$\boxed{r = Z \cdot \frac{360}{t \cdot (q-1)}}$$

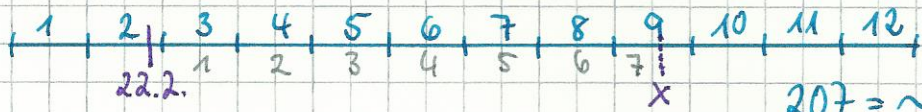
NR: $r \cdot \frac{t}{360} \cdot (q-1) = Z \quad | \cdot 360 \; | : t \; | : (q-1)$

Berechnung des Auszahlungstages (ATg)

gegeben: ETg, Z, r gesucht: ATg

$\boxed{t = Z \cdot \frac{360}{r \cdot (q-1)}}$ NR: $r \cdot \frac{t}{360} \cdot (q-1) = Z \quad | \cdot 360 \quad | : r \quad | : (q-1)$

z.B: Einzahlungstag 22.2.1.J., $t = 207$



$207 = \sim 7 \cdot 30$

$t = (9-2) \cdot 30 + (x-22)$

$207 = 210 + x - 22 \quad | -210 + 22$

$207 - 210 + 22 = x$

$19 = x$

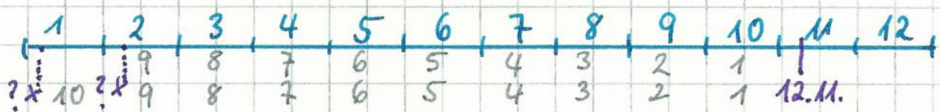
ATg = 19.9.1.J

Berechnung des Einzahlungstages ETg

gegeben: ATg, Z, r gesucht: ETg

$\boxed{t = Z \cdot \frac{360}{r \cdot (q-1)}}$ Nr. s.o.

z.B. Auszahlungstag: 12.11.1.J; $t = 287$



$287 = \sim 9 \cdot 30$	$287 = \sim 10 \cdot 30$
$t = (11-2) \cdot 30 + (12-x)$	$t = (11-1) \cdot 30 + (12-x)$
$287 = 270 + 12 - x$	$287 = 300 + 12 - x$
$287 - 270 - 12 = -x$	$287 - 300 - 12 = -x$
$5 = -x$	$-25 = -x$
$-5 = x$	$25 = x$

ETg = 25.1.1.J

VERZINSUNG VON EINZELBETRÄGEN

I. EINFACHE ZNSRECHNUNG

1. EINFACHE ZINSRECHNUNG

Relativer Zinsfuß

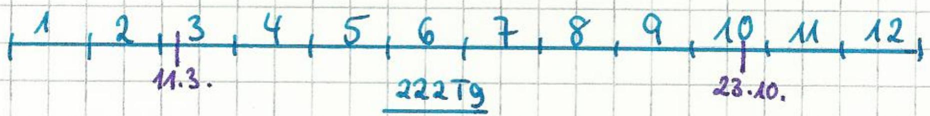
relativer Zinsfuß pro Tag $\frac{p}{360}$

relativer Zinsfuß pro Monat $\frac{p}{12}$

relativer Zinsfuß pro Quartal $\frac{p}{4}$

Berechnung der Laufzeit (t)

z.B. Einzahlungstag (ETg) 11.3.1.J., Auszahlungstag (ATg) 23.10.1.J.



$$\boxed{t = (AMon - EMon) \cdot 30 + (ATg - ETg)}$$

Berechnung der Zinsen (Z)

gegeben: r, t, p gesucht: Z

$$\boxed{Z = r \cdot \frac{t}{360} \cdot (q-1)}$$

Einfache Zinsformel

NR: $q = 1 + \frac{p}{100} \quad | -1$

$q - 1 = \frac{p}{100}$

Berechnung des Anfangkapitals (r)

gegeben: Z, t, p gesucht: r

$$\boxed{r = Z \cdot \frac{360}{t \cdot (q-1)}}$$

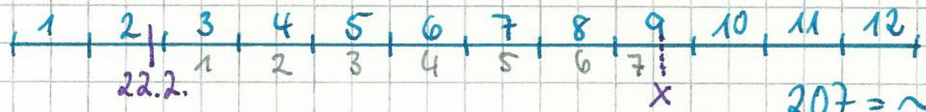
NR: $r \cdot \frac{t}{360} \cdot (q-1) = Z \quad | \cdot 360 \; | : t \; | : (q-1)$

Berechnung des Auszahlungstages (ATg)

gegeben: ETg, Z, r gesucht: ATg

$\boxed{t = Z \cdot \frac{360}{r \cdot (q-1)}}$ NR: $r \cdot \frac{t}{360} \cdot (q-1) = Z \quad | \cdot 360 \; | : r \; | : (q-1)$

z.B: Einzahlungstag 22.2.1.J., $t = 207$



$207 = \sim 7 \cdot 30$

$t = (9-2) \cdot 30 + (x-22)$

$207 = 210 + x - 22 \quad | -210 + 22$

$207 - 210 + 22 = x$

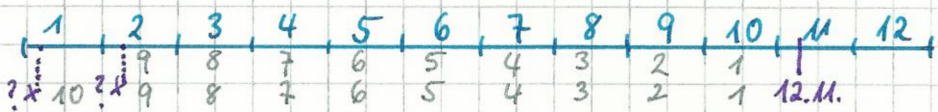
$19 = x$ ATg = 19.9.1.J

Berechnung des Einzahlungstages ETg

gegeben: ATg, Z, r gesucht: ETg

$\boxed{t = Z \cdot \frac{360}{r \cdot (q-1)}}$ Nr. s.o.

z.B. Auszahlungstag: 12.11.1.J; $t = 287$



$287 = \sim 9 \cdot 30$	$287 = \sim 10 \cdot 30$
$t = (11-2) \cdot 30 + (12-x)$	$t = (11-1) \cdot 30 + (12-x)$
$287 = 270 + 12 - x$	$287 = 300 + 12 - x$
$287 - 270 - 12 = -x$	$287 - 300 - 12 = -x$
$5 = -x$	$-25 = -x$
$-5 = x$	$25 = x$

ETg = 25.1.1.J

Berechnung des Zinsfußes

gegeben: Z, r, t gesucht: p

$$\boxed{q = Z \cdot \frac{360}{r \cdot t} + 1}$$

NR: $r \cdot \frac{t}{360} \cdot (q-1) = Z \quad | \cdot 360 \; | : r \; | : t$

$q - 1 = Z \cdot \frac{360}{t \cdot r} \quad | +1$

$q = Z \cdot \frac{360}{t \cdot r} + 1$

$q = \frac{p}{100} + 1 \Rightarrow \underline{p = (q-1) \cdot 100}$

2. AUFZINSUNG UND ABZINZUNG

Aufzinsung - Berechnung des Kontostands am Jahresende (E)

gegeben: r, t, p gesucht: E

$$\boxed{E = r\left(1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)\right)}$$

NR: $E = r + Z$

$E = r + r \cdot \frac{t}{360} \cdot (q-1)$

Abzinsung - Berechnung des Anfangskapitals (r)

gegeben: E, t, p gesucht: r

$$\boxed{r = \frac{E}{1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)}}$$

NR: $r \cdot \left(1 + \frac{t}{360}(q-1)\right) = E \quad | : \left(1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)\right)$

Berechnung des Einzahlungstages (ETg)

gegeben: E, r, p gesucht: t

$$\boxed{t = \left(\frac{E}{r} - 1\right) \cdot \frac{360}{(q-1)}}$$

NR: $r \cdot (1 + \frac{t}{360}(q-1) = E \quad | : r$

$1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1) = \frac{E}{r} \quad | -1$

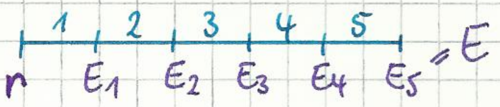
$\frac{t}{360} \cdot (q-1) = \frac{E}{r} - 1 \quad | \cdot 360 \; | : (q-1)$

II. ZINSESZINSRECHNUNG

1. EINFACHE ZINSESZINSFORMEL

Berechnung des Kontostands am Ende eines Jahres (E)

gegeben: r, p, t (z.B. 5 Jahre) gesucht: E



$$\boxed{E = r \cdot q^n}$$

Einfache Zinseszinsformel

= Aufzinsung

Nr. $E = r \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)\right)$

$E_1 = r \cdot \left(1 + \frac{360}{360} \cdot (q-1)\right)$

$= r \cdot (1 + q - 1) = r \cdot q$

$E_2 = (r \cdot q) q = r \cdot q^2$

$E_3 = (r \cdot q^2) q = r \cdot q^3$

Berechnung des Anfangkapitals (r)

gegeben: E, p, n (= t in Jahren) gesucht: r

$$\boxed{r = \frac{E}{q^n}}$$

Nr. $r \cdot q^n = E \quad | : q^n$ (Einfache Zinseszinsformel)

= Abzinsung

Berechnung des Zinsfußes (p)

gegeben: E, r, n gesucht: p

$$\boxed{q = \sqrt[n]{\frac{E}{r}}}$$

Nr. $r \cdot q^n = E \quad | : r$

$q^n = \frac{E}{r}$

$\sqrt[n]{p^n} = \sqrt[n]{\frac{E}{r}}$

$q = \sqrt[n]{\frac{E}{r}}$

(Wurzelberechnung siehe „Wichtige Berechnungen“

Berechnung des Zeitraums (n)

gegeben: E, r, p gesucht: n

$$\boxed{n = \frac{\lg E}{\lg q}}$$

NR:
$$r \cdot q^n = E \quad |:r$$
$$q^n = \frac{E}{r}$$
$$\lg q^n = \lg \frac{E}{r}$$
$$n \cdot \lg q = \lg \frac{E}{r} \quad |:\lg q$$
$$n = \frac{\lg \frac{E}{r}}{\lg q}$$

Berechnung der Verdopplung des Kapitals

a) bei welchem Zinssatz verdoppelt sich das Kapial in n Jahren?

gegeben: r, t (in Jahre) gesucht: p

$$\boxed{p = 2^{\frac{1}{n}}}$$

NR: $E = 2r$; $r \cdot q^n = E$
$$r \cdot q^n = 2r \quad |:r$$
$$q^n = 2$$
$$q = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$$

b) wann hat sich ein Kapital verdoppelt bei einem bestimmten Zinssatz?

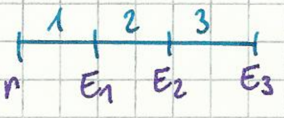
gegeben: r, p gesucht: t (in Jahren)

$$\boxed{n = \frac{\lg 2}{\lg q}}$$

NR:
$$q^n = 2$$
$$\lg q^n = \lg 2$$
$$n \cdot \lg q = \lg 2 \quad |:\lg q$$
$$n = \frac{\lg 2}{\lg q}$$

Berechnung des effektiven Zinsfußes

gegeben: $r, t, p_1 \dots p_n$ (z.B. $p_1 \dots p_3$) gesucht: p_e



$$\boxed{q_e = \sqrt[3]{q_1 \cdot q_2 \cdot q_3}}$$

$q_e = \frac{p}{100} + 1 \Rightarrow \underline{p_e = (q-1) \cdot 100}$

Nr.: $E_1 = r \cdot q_1$

$E_2 = E_1 \cdot q_2 = r \cdot q_1 \cdot q_2$

$E_3 = E_2 \cdot q_3 = r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$

$r \cdot q_e^3 = r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \quad | :r$

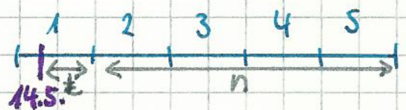
$q_e^3 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$

[$\Leftrightarrow$ Wertzuwachs: addieren der Zinsfüße und teilen durch die Anzahl]

2. VERALLGEMEINERTE ZINSESZINSFORMEL

Berechnung des Kontostands am Ende eines Jahres (E)

gegeben: r, p, L $(= t + n)$ gesucht: E



$L = \frac{t}{360} + n$

$$\boxed{E = r \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)\right) \cdot q^n}$$

= Aufzinsung

Nr. $E_1 = \left(1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)\right)$

$E = E_1 \cdot q^n$

Berechnung des Anfangskapitals (r)

gegeben: E, p, L $(= t + n)$ gesucht: r

$$\boxed{r = \frac{E}{\left(1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)\right) \cdot q^n}}$$

Nr. $r \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)\right) \cdot q^n = E \quad \left| :\left(1 + \frac{t}{360} \cdot (q-1)\right) \right| :q^n$

= Abzinsung

Berechnung des Einzahlungstags (ETg)

gegeben: r, p, E, n

gesucht: ETg (liegt hier im 1. Jahr)

$$\boxed{t = \left(\frac{E}{r\cdot q^n} - 1\right)\cdot \frac{360}{q-1}}$$

NR:

$$E = r\cdot\left(1+\frac{t}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^n \quad |:r \;|:q^n$$

$$\frac{E}{r\cdot q^n} = 1+\frac{t}{360}\cdot(q-1) \quad |-1$$

$$\left(\frac{E}{r\cdot q^n}-1\right) = \frac{t}{360}\cdot(q-1) \quad |\cdot 360 \;|:(q-1)$$

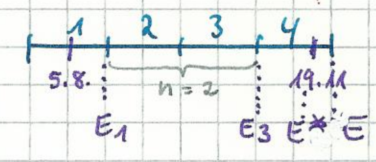
$$\left(\frac{E}{r\cdot q^n}-1\right)\cdot\frac{360}{q-1} = t$$

Berechnung des Kontostands (E^*) / ETg + ATg mitten im Jahr

gegeben: ETg, ATg, r, p

gesucht: E^*

$$\boxed{E^* = \left(r\cdot\left(1+\frac{t}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^n\right)\cdot\left(1+\frac{t}{360}\cdot(q-1)\right)}$$



Nr:

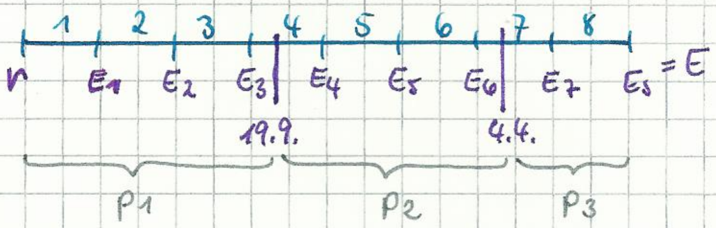
$$E_3 = r\cdot\left(1+\frac{t}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^n$$

$$E^* = E_3\cdot\left(1+\frac{t}{360}\cdot(q-1)\right)$$

- Kontostand, wenn Konto weiter besteht: 19. 11. 4. J: E_3
  da Zinsen erst am Jahresende gutgeschrieben werden
- Kontostand, wenn das Konto aufgelöst wird: 19. 11. 4. J: E^*

Berechnung des Kontostands (E) bei wechselndem Zinsfuß

gegeben: r, L (=t+n), $p_1 \dots p_n$ gesucht: E



$$E_3 = r \cdot q^3$$

$$E_4 = E_3 \cdot \left(1 + \frac{259}{360} \cdot (q_1 - 1)\right) + E_3 \cdot \left(1 + \frac{101}{360} \cdot (q_2 - 1)\right)$$

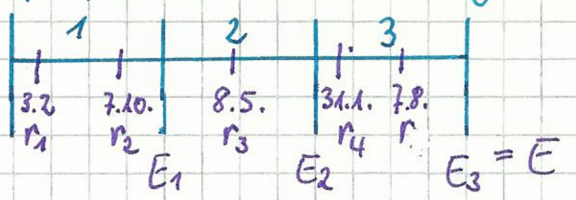
$$E_6 = E_4 \cdot q_2^{\,2}$$

$$E_7 = E_6 \cdot \left(1 + \frac{93}{360} \cdot (q_2 - 1)\right) + E_6 \cdot \left(1 + \frac{267}{360} \cdot (q_3 - 1)\right)$$

$$E = E_7 \cdot q_3$$

Berechnung des Kontostands (E) bei zusätzlichen Einzahlungen

gegeben: L (t+n), p, $r_1 \dots r_n$ gesucht E



$$E_1 = r \cdot \left(1 + \frac{327}{360} \cdot (q-1)\right) + r_2 \cdot \left(1 + \frac{83}{360} \cdot (q-1)\right)$$

$$E_2 = E_1 \cdot q + r_3 \cdot \left(1 + \frac{232}{360} \cdot (q-1)\right)$$

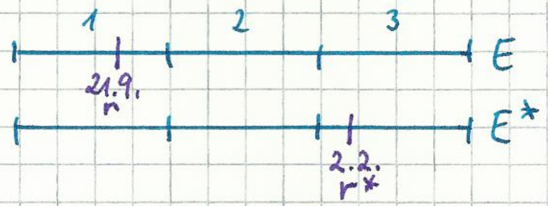
$$E = E_2 \cdot q + r_4 \cdot \left(1 + \frac{357}{360} \cdot (q-1)\right) + r_4 \cdot \left(1 + \frac{143}{360} \cdot (q-1)\right)$$

III ÄQUIVALENZ

1. EINFACHES ÄQUIVALENT

Berechnung von Kontoständen (E, E^*) am Ende eines Jahres

gegeben: $r, r^*, L(t+n)$ gesucht: E, E^*



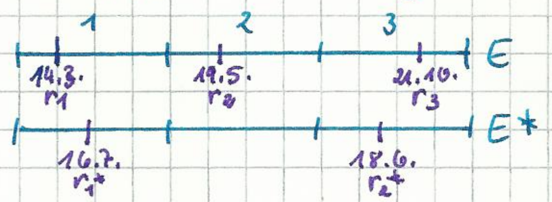
$$E = r\cdot(1+\frac{99}{360}\cdot(q-1)\cdot q^n$$
$$E^* = r^*\cdot(1+\frac{328}{360}\cdot(q-1)$$

$$\boxed{\text{Wenn } E = E^* \Rightarrow r \text{ und } r^* \text{ sind äquivalent}}$$

2. ÄQUIVALENT MIT EINZAHLUNGS-/AUSZAHLUNGSFOLGE

Berechnung von Kontoständen (E, E^*) am Ende eines Jahres

gegeben: $r_1 \ldots r_n, r^* \ldots r_n^*, p, L(t+n)$ gesucht: E, E^*



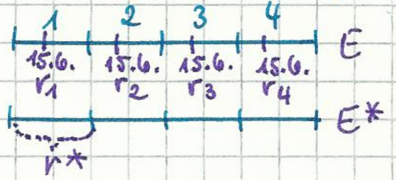
$$E = r\cdot(1+\frac{286}{360}\cdot(q-1))\cdot q^2$$
$$+ r_2\cdot(1+\frac{221}{360}\cdot(q-1))\cdot q$$
$$+ r_3\cdot(1+\frac{69}{360}\cdot(q-1))\cdot$$

$$E^* = r_1^*\cdot(1+\frac{164}{360}\cdot(q-1))\cdot q^2$$
$$+ r_2^*(1+\frac{192}{360}\cdot(q-1))$$

Wenn $E = E^* \Rightarrow (r_1, r_2, r_3)$ äquivalent zu (r_1^*, r_2^*)

Berechnung eines Anfangrapitals (r^*)

gegeben: p, $L(t+n)$, $r_1 \dots r_n$ gesucht r^* im 1. J.



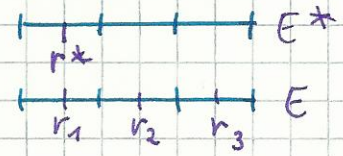
$$E_1 = r\left(1+\tfrac{195}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^3$$
$$E_2 = E_1\cdot\left(1+\tfrac{195}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^2$$
$$E_3 = E_2\cdot\left(1+\tfrac{195}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^3$$
$$E = E_3\cdot\left(1+\tfrac{195}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^4$$

$$r^*\cdot\left(1+\tfrac{328}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^n = E$$
$$r^* = \frac{E}{\left(1+\frac{328}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^n}$$

Berechnung des Zinsfußes (p)

gegeben: $Z(t+n)$, r^*, $r_1 \dots r_n$ gesucht: p

$r_n - r_1$ = Restschuld



$$E^* = r^*\cdot\left(1+\underbrace{\tfrac{180}{360}}_{=\frac{1}{2}}\cdot(q-1)\right)\cdot q^2$$

$$E = r_1\left(1+\tfrac{180}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q^2 + r_2\left(1+\tfrac{180}{360}\cdot(q-1)\right)\cdot q + r_3\left(1+\tfrac{180}{360}\cdot(q-1\right)$$

$$r^*\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}(q-1)\right)q^2 = r_1\left(1+\tfrac{1}{2}(q-1)\right)q^2 + r_2\left(1+\tfrac{1}{2}(q-1)\right)\cdot q + r_3\cdot\left(1\tfrac{1}{2}(q-1)\right) \quad \Big|:\left(1+\tfrac{1}{2}(q-1)\right)$$
$$r^* q^2 = r_1 q^2 + r_2 q + r_3$$
$$r^* q^2 - r_1 q^2 - r_2 q - r_3 = 0 \qquad \text{(normieren!)}$$
$$\underbrace{(r^* - r)}_{a} q^2 - \underbrace{r_2}_{b} q - \underbrace{r_3}_{c} = 0$$

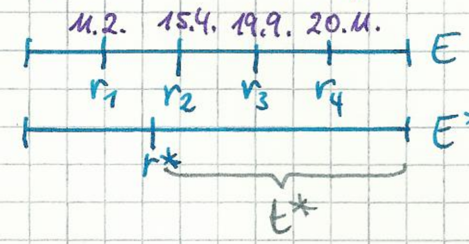
$$q_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-(-r_2) \pm \sqrt{(-r_2)^2 - 4\cdot(r^* - r_1)\cdot(-r_3)}}{2\cdot(r^* - r_1)}$$

$q_1 = +$ $q_2 = -$ (Minus ist hier nicht relevant)

$$p = (q_1 - 1)\cdot 100$$

Berechnung des mittleren Zahlungstermins innerhalb eines Jahres

gegeben: $r_1 \dots r_n, p, t$ gesucht t^*



$$\boxed{t^* = \frac{r_1 t_1 + r_2 t_2 + \dots + r_n t_n}{r_1 + r_2 + \dots + r_n}}$$

$r^* = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$

NR:
$$
\begin{aligned}
&\cancel{r_1} + \frac{r_1 \cdot t_1}{\cancel{360}} \cdot \cancel{(q-1)} && \Big| \cdot 360 \\
+\ &\cancel{r_2} + \frac{r_2 \cdot t_2}{\cancel{360}} \cdot \cancel{(q-1)} && \Big| : (q-1) \\
+\ &\cancel{r_3} + \frac{r_3 \cdot t_3}{\cancel{360}} \cdot \cancel{(q-1)} \\
+\ &\cancel{r_4} + \frac{r_4 \cdot t_4}{\cancel{360}} \cdot \cancel{(q-1)} = \\
=\ &\cancel{r^*} + \frac{r^* \cdot t^*}{\cancel{360}} \cdot \cancel{(q-1)}
\end{aligned}
$$

$$r_1 \cdot t_1 + r_2 \cdot t_2 + r_3 \cdot t_3 + r_4 \cdot t_4 = r^* \cdot t^* \quad \Big| : r^*$$

VERZINSUNG VON RENTEN

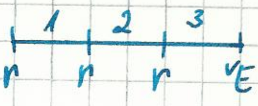
I EINFACHE RENTENBERECHNUNG (JAHRESRENTE)

1. VORSCHÜSSIG

Berechnung des Endwerts (^{v}E)

gegeben: r, p, t bzw. n   gesucht ^{v}E

$$\boxed{^{v}E = rq \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$$



Nr.: $^{v}E = r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q$

$= r \cdot q\,(q^2 \cdot q + 1)$

$x = q^2 + q + 1 \quad | \cdot q$

$x \cdot q = q^3 + q^2 + q \quad | \cdot (-1)$

$-x = -q^2 - q - 1 \quad +$

$xq - x = q^3 - 1$

$x \cdot (q-1) = q^3 - 1$

$x = \frac{q^3 - 1}{q - 1}$

$$\boxed{^{v}E = {}^{n}E \cdot q}$$

Berechnung des Rentenbetrags (r)

gegeben: n, p, ^{v}E gesucht: r

Einsetzen in Formel.

$^{v}E = rq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

z.B: $32000 = r \cdot 1{,}065 \cdot \frac{1{,}065^8 - 1}{1{,}065 - 1}$

$32000 = r \cdot 10{,}731852 \quad | : 10{,}731852$

$\frac{32000}{10{,}731852} = r = 2981{,}78$

Berechnung der Laufzeit in Jahren (n)

gegeben: r, p, ^vE gesucht: n

Einsetzen in Formel

$$^vE = rq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

z.B.: $58144{,}24 = 4630 \cdot 1{,}066 \cdot \frac{1{,}066^n - 1}{1{,}066 - 1}$

$$\frac{1{,}066^n - 1}{1{,}066 - 1} = \frac{58144{,}24}{4630 \cdot 1{,}066} = 11{,}78063$$

$$1{,}066^n = 11{,}78063 \cdot (1{,}066 - 1) + 1 = 1{,}777522$$

$$n \cdot \lg 1{,}066 = \lg 1{,}777522$$

$$n \cdot 0{,}027757 = 0{,}249815 \Rightarrow n = 9$$

2. NACHSCHÜSSIG

Berechnung des Endwerts (^nE)

gegeben: r, p, E bzw n gesucht: ^nE

$$\boxed{^nE = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$\boxed{^nE = \frac{^vE}{q}}$$

1 2 3
r r r

Nr. $^nE = rq^3 + rq^2 + rq + r$

$= r(q^2 + q + 1)$

$$\begin{aligned}
x &= q^2 + q + 1 && | \cdot q \\
x \cdot q &= q^3 + q^2 + q && | \cdot (-1) \\
-x &= -q^2 - q - 1 && + \\
\hline
xq - x &= q^3 - 1 \\
x \cdot (q - 1) &= q^3 - 1 \\
x &= \frac{q^3 - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

Berechnung des Rentenbetrages (r)

gegeben: n, p, ^nE gesucht: r

Einsetzen in Formel

$$^nE = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

z.B.: $31000 = r \cdot \frac{1{,}065^8 - 1}{1{,}065 - 1}$

$$\frac{31000}{10{,}076856} = r = 3076{,}36$$

Berechnung der Laufzeit in Jahren (n)

gegeben: $r, p, {}^nE$ gesucht: n

Einsetzen in Formel

$${}^nE = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

z.B: $54544{,}32 = 4630 \cdot 1{,}066 \cdot \frac{1{,}066^n - 1}{1{,}066 - 1}$

$$\frac{1{,}066^n - 1}{1{,}066 - 1} = \frac{54544{,}32}{4630 \cdot 1{,}066} = 11{,}05125$$

$$1{,}066^n = 11{,}05125 \cdot (1{,}066 - 1) + 1 = 1{,}72938$$

$$n \cdot \lg 1{,}066 = \lg 1{,}72938$$

$$n \cdot 0{,}027757 = 0{,}237890 \Rightarrow n = 9$$

II ÄQUIVALENZ (JAHRESRENTE)

1. VORSCHÜSSIG

Berechnung des Barwerts (${}^vB$) am Anfang d. J.

gegeben: r, q, n gesucht: ${}^vB$

$${}^vE = r \cdot q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

$${}^vB \cdot q^5$$

$$\boxed{{}^vB = \frac{{}^vE}{q^n}}$$

NR: ${}^vE = r \cdot q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$

$${}^vB \cdot q^5 = {}^vE$$

$${}^vB \cdot q^5 = r \cdot q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} \quad | : q^5$$

$${}^vB = \frac{r \cdot q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}}{q^5}$$

$${}^vB = \frac{\cancel{q^1}}{q^{\cancel{5}4}} \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

$${}^vB = \frac{r}{q^4} \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

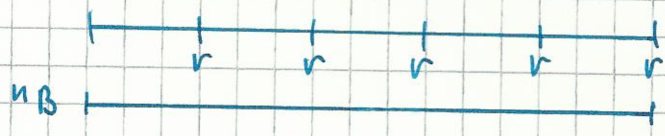
$${}^vB = \frac{{}^vE}{q^5}$$

2. NACHSCHÜSSIG

Berechnung des Barwerts (^nB)

gegeben: r, q, n

gesucht: ^nB



$^nE = r\,\frac{q^5-1}{q-1}$

$^nB \cdot q^n$

$$\boxed{^nB = \frac{^nE}{q^n}}$$

NR: $^nE = r\,\frac{q^5-1}{q-1}$

$^nB \cdot q^5 = {}^vE$

III MONATS- / QUARTALSRENTEN

1. VORSCHÜSSIG

Berechnung des Endwertes

gegeben: r, p, t (t^* = Anz. d. Monate) gesucht: ${}^vE$ t' = Monate ab 1. Einz. bis Ende des Jahres

$$\boxed{{}^vE' = r \cdot \left[t^* + \frac{(2t' - t^* + 1) \cdot t^*}{24} \cdot (q-1)\right]}$$ 1 Jahr

vereinfacht:

$${}^vE' = r \cdot \left[t^* + \frac{(t^*+1) \cdot t^*}{24} \cdot (q-1)\right]$$ Monat i. J. bis Ende d. J.

$${}^vE' = r \cdot \left[12 + \frac{13}{12} \cdot (q-1)\right]$$ 12x Monatsrente

$${}^vE' = r \cdot \left[4 + \frac{5}{2} \cdot (q-1)\right]$$ 4x Quartalsrente

$$\boxed{{}^vE = r \cdot \left[t^* + \frac{(2t' - t^* + 1) \cdot t^*}{24} \cdot (q-1)\right] \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$ mehrere Jahre

2. NACHSCHÜSSIG

Berechnung des Endwertes

gegeben: r, p, t (t^* = Anz. d. Monate) gesucht: ${}^vE$

$$\boxed{{}^vE' = r \cdot \left[t^* + \frac{(2t' - t^* - 1) \cdot t^*}{24} \cdot (q-1)\right]}$$ 1 Jahr

vereinfacht:

$${}^vE' = r \cdot \left[t^* + \frac{(t^*-1) \cdot t^*}{24} \cdot (q-1)\right]$$ Monat i. J. bis Ende d. J.

$${}^vE' = r \cdot \left[12 + \frac{11}{12} \cdot (q-1)\right]$$ 12x Monatsrente

$${}^vE' = r \cdot \left[4 + \frac{3}{2} \cdot (q-1)\right]$$ 4x Quartalsrente

$$\boxed{{}^vE = r \cdot \left[t^* + \frac{(2t' - t^* - 1) \cdot t^*}{24} \cdot (q-1)\right] \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

TILGUNGSRECHNUNG

I. TILGUNG EINER GESAMTFÄLLIGEN SCHULD

Tilgungsplan

gegeben: $200\,000 = S$, $3 = n$, $5{,}5 = p$

$\boxed{Z_1 = S \cdot (q-1)}$

S	T_1	T_2	T_3	T_{n-1}	T_n
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_{n-1}	Z_n

	Z	T	R	Z + T
1	11 000		200 000	11 000
2	11 000		200 000	11 000
3	11 000	200 000	200 000	211 000

} jähl. Zahlung

Bem: Die Zinsen werden jährlich bezahlt, deshalb keine Zinseszinsrechnung.

II TILGUNG EINER RATENSCHULD

Tilgungsplan

gegeben: $150\,000 = S$, $3 = n$, $5{,}2 = p$

$$T_1 = T_2 = \dots = T_n = \frac{S}{n} = T$$

	Z	T	R	Z + T
1	7 800	50 000	150 000	57 800
2	5 200	50 000	100 000	55 200
3	2 600	50 000	50 000	52 600

} jährl. Zahlung

Bem: Es werden jährlich die Tilgung und die Zinsen bezahlt

Einzelberechnungen

$\boxed{T = \frac{S}{n}}$

$\boxed{R_k = S - (k-1) \cdot T}$

$\boxed{Z_k = R_k \cdot (q-1)}$

NR: $T = \frac{150\,000}{3} = 50\,000$

$R_1 = 150\,000$ $\quad R_1 = S$

$R_2 = 150\,000 - 50\,000 = 100\,000$ $\quad R_2 = S - T$

$R_3 = 100\,000 - 50\,000 = 50\,000$ $\quad R_3 = S - 2T$

III. TILGUNG EINER ANNUITÄTENSCHULD

Tilgungsplan

gegeben: $200\,000 = S$ $\quad 3 = n \quad 5{,}5 = p$ $\quad$ gesucht: A

Bedingung: $Z_1 + T_2 = Z_2 + T_2 = \ldots = Z_n + T_n = A$

S A A A A A

	Z	T	R	A
1	11 000	63 130,81	200 000,-	74 130,81
2	7 527,81	66 603,00	136 869,19	74 130,81
3	3 864,64	70 266,19	70 266,19	74 130,83

\+ =

Taschenrechner:
1. A in den Speicher (M+) ©
2. R × 0,055 $\quad (= R \cdot (q-1))$
3. − M = $\quad$ (− A) neg. Zahl ! = T
4. \+ R = (wird neues R in nächste Zeile)

Bem: A = konstante jährlich zu zahlende Rate ($A = T + Z$)

Einzelberechnungen

$$\boxed{A = \frac{S}{\frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}}$$

NR: $^{n}B = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \qquad r \mathrel{\hat=} A; \ ^{n}B \mathrel{\hat=} S$

$$S = \frac{A}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = A \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$A = \frac{S}{\frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q^n}} = 74\,130{,}81$$

$$\boxed{R_t = S - T_1 \cdot \frac{q^{t-1}-1}{q-1}}$$

NR: $R_1 = S; \ R_2 = S - T_1; \ R_3 = S - T_1 - T_2$

$$R_t = S - T_1 - T_2 \ldots - T_{t-1}$$

$$\| \ T_t = T_1 \cdot q^{t-1} \Rightarrow T_{t-1} = T_1 \cdot q^{t-1-1}$$

$$R_t = S - T_1 - T_1 \cdot q - T_1 \cdot q^2 \ldots - T_1 \cdot q^{t-2}$$

$$R_t = S - T_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{t-2}) = S - T_1 \frac{q^{t-1}-1}{q\ 1}$$

$$\underset{1}{1} + \underset{2}{q} + \underset{3}{q^2} = \frac{q^3-1}{q-1}$$

$$\boxed{Z_t = R_t \cdot (q-1)}$$

NR: $Z_1 = R_1 \cdot (q-1)$

$$\boxed{T_t = A - Z_t}$$

Nr.: $Z_1 + T_1 = A \Rightarrow T_1 = A - Z_1$